

# Medición de la aceleración de la gravedad mediante plano inclinado

Lopez, Johanna Giselle ([gyf\\_lola@hotmail.com](mailto:gyf_lola@hotmail.com))

Martinez Roldan, Antu ([antucolomenos@hotmail.com](mailto:antucolomenos@hotmail.com))

Viglezzi, Ramiro ([ramiro.viglezzi@gmail.com](mailto:ramiro.viglezzi@gmail.com))

Física Experimental I - Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN

Octubre 2011

Tandil, provincia de Buenos Aires, Argentina

## Resumen

El objetivo de este trabajo fue medir la aceleración de la gravedad local  $g$  por medio del experimento de plano inclinado. Luego de las respectivas mediciones e interpretaciones de los resultados concluimos que:

$$g = (8.4 \pm 0.4) \text{ m/s}^2$$

## Introducción

La gravedad es una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, junto al electromagnetismo, la interacción nuclear fuerte y la interacción nuclear débil. En el año 1686, Isaac Newton publicó en su obra *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* la Ley de gravitación universal, definiéndola como [1]:

*Toda partícula de materia del Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza (F) directamente proporcional al producto de las masas de ambas partículas ( $mm'$ ) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia ( $d^2$ ) que las separa:*

$$F \propto \frac{mm'}{d^2}$$

Por lo tanto, para los cuerpos de tamaño moderado, la fuerza es extremadamente pequeña, pero cuando una de las masas involucradas es mucho mayor a la otra, como en el caso del planeta Tierra y todo cuerpo sobre él, la fuerza gravitatoria es considerable, produciendo una aceleración sobre estos hacia el centro del planeta. Esta aceleración es lo que se conoce como aceleración gravitatoria, la cual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay al centro de la Tierra.

Existen dos métodos para el cálculo de  $g$  mediante el experimento de plano inclinado. Por cinemática, se utiliza el movimiento rectilíneo de un cuerpo con aceleración constante, donde se plantea una distancia que recorre dicho cuerpo en función de un tiempo  $t$ .

$$x(t) = x_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g \text{ sen } (\vartheta) t^2$$

Siendo  $x_0$  la posición inicial,  $V_0$  la velocidad inicial,  $t$  el tiempo que tarda en recorrer una distancia  $x$ ,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $\vartheta$  el ángulo de inclinación del plano por el cual se desliza el cuerpo. En este modelo se asume que el rozamiento en el plano inclinado es despreciable. La mayor dificultad experimental que se presenta en este método, es la estimación del ángulo de inclinación del plano utilizado con respecto a la horizontal. En trabajos anteriores donde se ha

utilizado el mismo experimento [2], el mayor error que modifica el resultado final de  $g$  es la medición de dicho ángulo. Por este motivo se decidió utilizar el principio de conservación de la energía donde se desprecia el ángulo de inclinación del plano.

Según el principio de la conservación de la energía, la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado, sin la acción de una fuerza exterior, permanece invariable con el tiempo [3]. En este caso en particular, se tiene que si se desliza un cuerpo por una superficie sin rozamiento, la variación de la energía mecánica será nula:

$$\Delta E_m = 0$$

A su vez, la variación de la energía mecánica es la suma de la variación de la energía cinética ( $\Delta E_c$ ) mas la variación de la energía potencial ( $\Delta E_p$ ):

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$E_{cf} - E_{ci} = E_{pi} - E_{pf}$$

EL cuerpo parte del reposo ( $v_i = 0$ ), entonces la energía cinética inicial ( $E_{ci}$ ) es nula. Las alturas se miden desde el punto final de la trayectoria, por lo tanto, la energía potencial final ( $E_{pf}$ ) también es nula. La ecuación de energía queda de la siguiente forma:

$$E_{cf} = E_{pi}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh_i$$

$$v_f^2 = 2gh_i \quad (1)$$

A partir de esta ecuación puede observarse que si se mide la velocidad con la que llega al final de su trayectoria un cuerpo que se desliza desde una altura  $h$  por un plan inclinado, puede calcularse  $g$ . Como se puede ver en (1), el ángulo de inclinación del plano con respecto a la horizontal no es necesario, logrando eliminar los errores de la determinación de dicho ángulo como se planteo en un principio.

## Detalles experimentales

En esta experiencia, se dejó caer un carro de longitud  $l$  por un plano sin rozamiento desde una altura  $h_1$ . ( ver figura 1).

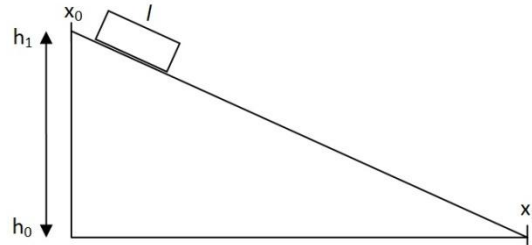


Figura 1: modelo del plano inclinado

Se utilizó un plano inclinado constituido por un riel de aluminio pulido marca Pasco Scientific modelo SF-9214 (ver figura 2). Este riel consiste en un tubo de 2 m de longitud dentro del cual se inyecta aire a presión con un flujo constante mediante una bomba de aire marca Pasco Scientific modelo SF-9216. La parte superior del riel, construida en forma de V invertida, posee pequeños orificios ubicados en forma equidistante, por el cual circula el flujo de aire produciendo así un colchón de aire minimizando el rozamiento del carro de tal forma que se pueda despreciar en el cálculo de la gravedad.

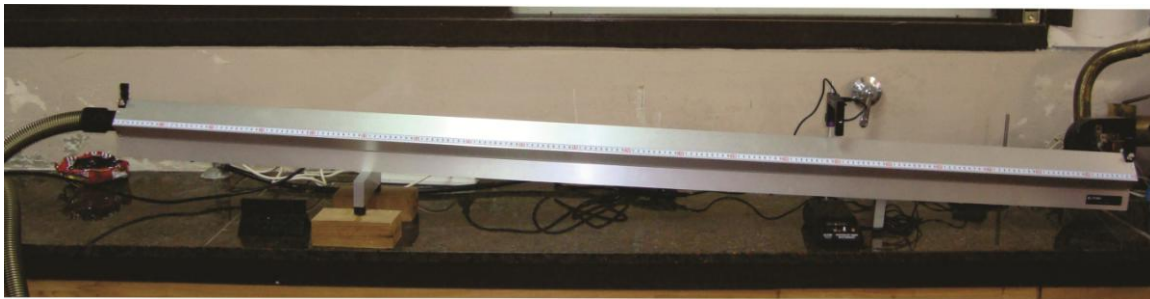


Figura 2: Riel Pasco Scientific SF-9214

El carro utilizado es de longitud  $l$  ( $129 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$ ), de la misma marca y material del riel. Para lograr distintas velocidades del móvil, lo que se hizo fue elevar el riel en uno de sus puntos de apoyo a diferentes alturas. Para la medición de las mismas se utilizó una manguera llena con agua, esto hace que se tengan dos puntos de referencia al mismo nivel horizontal, despreciando así los errores en la medición de la altura debidos a los desperfectos en el plano donde está ubicado el riel. Uno de los puntos de referencia se colocó en la posición  $x_1$  y el otro sobre la vertical de  $x_0$  estableciendo una altura  $h_0$  igual para las dos posiciones. Luego con respecto a esta altura  $h_0$  sobre la vertical de  $x_0$  se fueron midiendo las distintas alturas. Debido a que se utiliza agua en un tubo

abierto, se produce el efecto de tensión superficial, el cual producirá un menisco introduciendo un error en la medición de la altura [4]. Se realizaron los cálculos correspondientes del error sistemático que introduce dicho fenómeno (Ver apéndice A), quedando demostrado que la altura que se eleva el líquido es despreciable. De esta forma podemos asumir una incertidumbre de  $h$  de ( $\pm 0.001$  m).

La velocidad instantánea del carro en el punto  $x_1$  no se puede calcular directamente, por lo tanto se aproxima con respecto a la velocidad media:

$$V_i \cong V_m = \frac{l}{t} \quad (2)$$

Esta aproximación podría introducir un error sistemático por defecto. Esto ocurre debido a que no se está tomando en cuenta la aceleración que experimenta el carro mientras recorre la distancia igual a su largo en  $x_1$ , obteniendo una  $V_m$  menor a la verdadera. Realizando los correspondientes cálculos (Ver apéndice B) se concluyó que el error introducido por la aproximación de velocidades es despreciable, por lo tanto la hipótesis que  $V_i \cong V_m$  es aceptable.

Para determinar el tiempo que tarda el carro en pasar por  $x_1$  para poder calcular la velocidad media se colocó un fotosensor Pasco Scientific modelo ME-9215A equipado con un detector de luz, ubicado en forma de U invertida sobre el riel a 1.4 m del punto inicial  $x_0$  (ver figura 3). La incertidumbre de los tiempos medidos es ( $\pm 0.0001$  s).

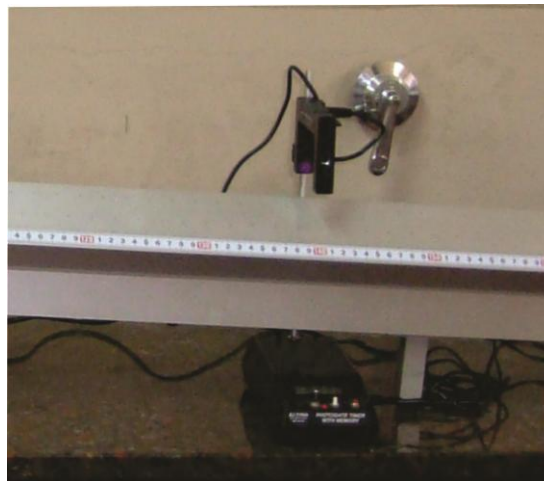


Figura 3: Fotosensor Pasco Scientific ME-9215A

Para el experimento se realizaron 20 mediciones para cada altura ( $h$ ) (ver apéndice D). Se tomaron 6 alturas diferentes en las cuales varía el ángulo de inclinación, debido a que la distancia recorrida por el carro es siempre la misma.

## Resultados

En el figura 4 se encuentra representado el cuadrado de la velocidad ( $v^2$ ) en función de la altura (h) por medio de regresión lineal.

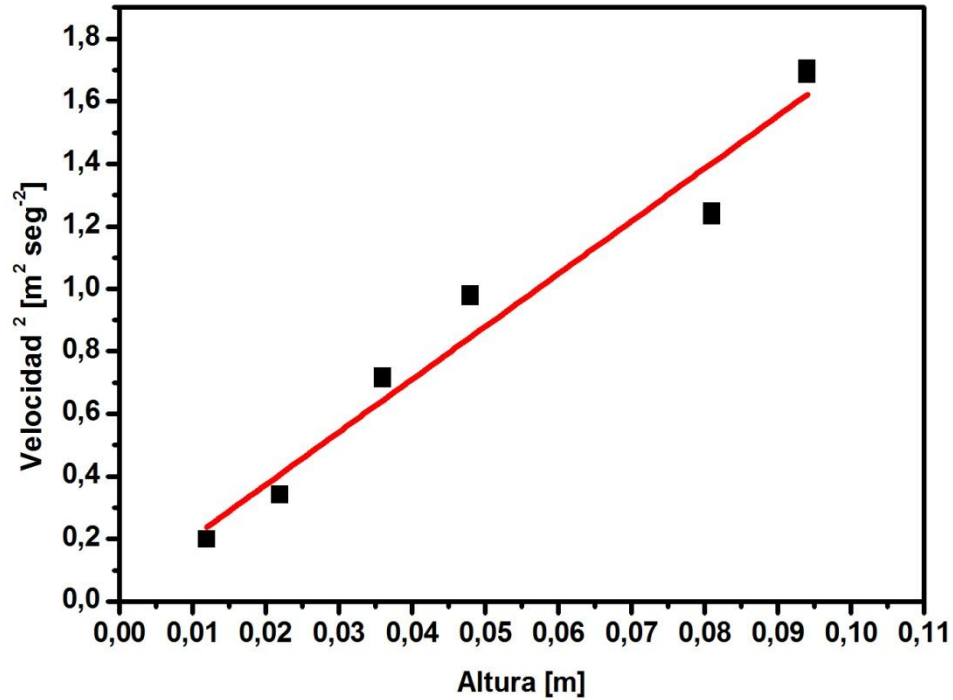


Figura 4: Cuadrado de la velocidad en función de la altura

Aplicando regresión lineal sobre los puntos experimentales, se obtuvieron los siguientes valores para los parámetros de ajuste:

$$\alpha = 16.8621 \text{ m/s}^2$$

$$\beta = 0.03595 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$r = 0.96118$$

$$\sigma_{\alpha} = 0.31059 \text{ m/s}^2$$

$$\sigma_{\beta} = 0.01776 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Donde  $\alpha$  es la pendiente de la recta,  $\beta$  la ordenada al origen,  $r$  el coeficiente de correlación lineal,  $\sigma_{\alpha}$  la incertidumbre de  $\alpha$  y  $\sigma_{\beta}$  la incertidumbre de  $\beta$ .

La pendiente de la recta queda representada de la siguiente manera:

$$\alpha = 2g$$

Entonces:

$$g = \frac{\alpha}{2}$$

Luego de hacer el cálculo correspondiente tanto de la incertidumbre absoluta de la medición calculada a partir de  $\sigma_\alpha$  y las incertidumbres instrumentales (ver apéndice C) se ha llegado a que el valor de g es:

$$g (95\%) = (8.4 \pm 0.4) \text{ m/s}^2$$

## Análisis

El valor de la aceleración de la gravedad obtenido mediante el plano inclinado fue  $g = (8.4 \pm 0.4) \text{ m/s}^2$ , representando un intervalo  $[8.02 - 8.84] \text{ m/s}^2$ . El valor de g medido de forma más precisa que es de  $9.799165 \text{ m/s}^2$  [5], se encuentra fuera del intervalo obtenido.

Como resultado de la regresión lineal, se obtuvo un valor  $\beta = 0.03595$  con su incertidumbre  $\sigma_\beta = 0.01776$ . Estos valores coinciden con el modelo adoptado, ya que el cero está incluido en un intervalo de 3 veces la desviación  $\sigma_\beta$   $[0.08923; - 0.01733]$ . El valor del coeficiente de correlación obtenido  $r = 0.96118$  indica una buena relación y linealidad entre las variables utilizadas.

La diferencia de este experimento con respecto al valor ya establecido de g, se debe a varias fluctuaciones debido a los siguientes errores:

- El rango de alturas introdujo una incertidumbre significativa en el valor resultante de la gravedad. Mediante el análisis de los resultados, se concluyó que el rango de alturas  $[0.03\text{m} - 0.05\text{m}]$  arrojaría resultados más precisos.
- Debido a que el valor obtenido de g es menor al valor medido por medios más exactos (error por defecto), la hipótesis de que el rozamiento es nulo puede ser que no se cumpla, por lo tanto el sistema no es conservativo, introduciendo un error sistemático en el cálculo de g.
- En la figura 4 se evidencia un corrimiento de los valores de las alturas con respecto a la recta arrojada por la regresión lineal. Esto podría ocurrir debido a una incertidumbre en la medición de h mayor a la considerada ( $\pm 1\text{mm}$ ) producida por fluctuaciones al azar, la cual introduce un error en la velocidad y por consiguiente en el valor estimado de g.

## Conclusiones

Mediante un plano inclinado y el cálculo de distintas variables se logró calcular la aceleración de la gravedad obteniendo un valor  $g = (8.4 \pm 0.4) \text{ m/s}^2$ . Para futuras realizaciones de este experimento, se recomienda utilizar el rango de alturas previamente mencionado para que dicho cálculo sea más exacto. También se recomienda estimar la fuerza de rozamiento que afecta a los valores que influyen en el cálculo indirecto de la velocidad, para comprobar si realmente es despreciable.



## Referencias

- [1] Francis W. Sears, Fundamentos de Física I: Mecánica, Calor y Sonido, Aguilar, España, 1967, Cap. XV.
- [2] M. Cabrera, S. Kessler, J. Solanilla, Determinación del valor de la aceleración de la gravedad  $g$  a través del método del plano inclinado, Física Experimental I, Facultad de Cs. Exactas, UNICEN, 2009
- [3] Francis W. Sears, Fundamentos de Física I: Mecánica, Calor y Sonido, Aguilar, España, 1967, Cap. VIII.
- [4] Francis W. Sears, Fundamentos de Física I: Mecánica, Calor y Sonido, Aguilar, España, 1967, Cap. XVI.
- [5] Información brindada por el Dr. A. Introcaso, Grupo de Geofísicos del Instituto de Física de Rosario (IFIR)

## Apéndice A: Calculo de la incertidumbre de h

La altura  $h_c$  que se eleva el líquido dentro del tubo por tensión superficial está dada por la siguiente fórmula:

$$H_c = \frac{2 \gamma \cos \theta}{r \rho_a g}$$

Donde  $\gamma$  es el coeficiente de tensión superficial, en este caso del agua,  $\theta$  el ángulo de contacto del agua con el tubo,  $r$  el radio del tubo,  $\rho_a$  la densidad del agua y  $g$  la aceleración de la gravedad.

La incertidumbre instrumental de la altura en el momento inicial donde se arroja el carro se calcula sumando el error del instrumento con el que se mide ( $\sigma m$ ), en este caso una regla, y el error asociado a la tensión superficial ( $\sigma h_t$ ), expresado de la siguiente forma:

$$\sigma h = \sigma m + \sigma h_t$$
$$\sigma h = \sigma m + \left( \frac{\delta h_t}{\delta r} \right) \sigma r$$

Utilizando derivadas parciales y reemplazando:

$$\sigma h = \sigma m + \frac{2 \gamma \cos \theta}{r^2 \rho_a g} \sigma r$$

Para un tubo con agua se tienen los siguientes datos

$$\gamma = 0.0728 \text{ N/m a } 20^\circ \text{C}$$

$$\theta = 20^\circ$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9.82 \text{ m/s}^2$$

$$\text{radio (del tubo utilizado)} = 0,01 \text{ m}$$

Reemplazando los valores en la ecuación de  $\sigma h$ :

$$\sigma h = 0.001 \text{ m} + \frac{2 \cdot 0.0728 \text{ N/m} \cdot \cos(20)}{(0.01 \text{ m})^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.82 \text{ m/s}^2} \cdot 0.00005 \text{ m}$$

$$\sigma h = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} + 7.41 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Analizando los resultados, se evidencia la diferencia de orden entre el error asociado al instrumento con el que se mide ( $\sigma m$ ) y el error asociado a tensión superficial ( $\sigma h_t$ ), por lo tanto este último error se desprecia, la incertidumbre de la altura es:

$$\sigma h = 0.001 \text{ m}$$

## Apéndice B: Verificación de la incertidumbre de la velocidad

Para poder comprobar si el error introducido por la aproximación se debe comparar la velocidad instantánea con la velocidad media, donde:

$$V_0 = \sqrt{2gh} = 1.385640646 \text{ m/s}$$
$$V_m = \frac{l}{t_2 - t_1} = 1.385258338 \text{ m/s}$$

Para poder calcular los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , se utiliza la ecuación de cinemática:

$$x(t) = L - \frac{1}{2} a t^2$$

La aceleración  $a$  se calcula mediante  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  y la relación entre  $h$  que es la altura desde donde se lanza el carro y  $L$  que es la longitud que recorre el carro.

$$a = g \operatorname{sen}\theta = g \frac{h}{L}$$

$$\frac{l}{2} = L - \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$-\frac{l}{2} = L - \frac{1}{2} a t_2^2$$

Con los datos ya conocidos y los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  calculados anteriormente se procede a calcular las velocidades:

$$V_0 = 1.385640646 \text{ m/s}$$

$$V_m = 1.385258338 \text{ m/s}$$

Se hace la siguiente relación para calcular la incertidumbre porcentual que existe entre una velocidad y la otra:

$$\frac{V_m - V_0}{V_0} \times 100 = 0.02759\%$$

Lo que se hizo posteriormente es calcular la incertidumbre instrumental porcentual relativa de la velocidad media, para observar si la hipótesis de que  $V_m$  es aproximadamente igual a  $V_0$  se cumple y el error sistemático es despreciable.

$$\frac{\Delta V_m}{V_m} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta t}{t_2 - t_1} = 0.02923$$

$$\frac{\Delta V_m}{V_m} \times 100 = 2.923\%$$

Se obtuvo una incertidumbre instrumental de  $V_m$  de un 2.923%, por lo tanto la incertidumbre de la diferencia entre velocidades que es de 0.02759% resulta despreciable. Por lo tanto el error sistemático no introduce una variación significativa en el cálculo de  $V$  dado que esa variación está contemplada en la variación instrumental de  $V$ .

### Apéndice C: Calculo de la incertidumbre de $g$

Para determinar la incertidumbre de  $g$ , es necesario calcular el error estadístico de la siguiente forma:

$$u_\lambda = z_\lambda \sigma_g$$

Donde  $u$  es el intervalo de confianza en el que se encuentra el verdadero valor de  $g$  con una probabilidad de  $\lambda=0,95$ .

Partiendo de la regresión lineal se tiene:

$$\sigma_g = \left( \frac{\delta g}{\delta \alpha} \right) \sigma_\alpha$$

$$\sigma_g = \frac{\sigma_\alpha}{2}$$

Quedando el error sistemático de la siguiente forma:

$$u_\lambda = z_\lambda \frac{\sigma_\alpha}{2}$$

Por lo tanto, el cálculo de la incertidumbre, utilizando  $z_\lambda = 1,96$  y  $\sigma_\alpha = 0,31$ , es igual a:

$$u_\lambda = 1.96 \frac{0.31}{2}$$

$$u_\lambda = 0.3$$

Por otro lado, la incertidumbre instrumental asociada a la velocidad está dada por:

$$\sigma_v = \left( \frac{\delta v}{\delta l} \right) \sigma_l + \left( \frac{\delta v}{\delta t} \right) \sigma_t = \frac{1}{t} \sigma_l + \frac{l}{t^2} \sigma_t$$

$$\sigma_v = \frac{1}{0.168s} 0.001m + \frac{0.129m}{0.028s^2} 0.0001s = 0.0064 \text{ m/s}$$

De esta forma, se puede calcular la incertidumbre instrumental total asociada a  $g$ , dada por:

$$U_g = \left( \frac{\delta g}{\delta v} \right) \sigma_v + \left( \frac{\delta g}{\delta h} \right) \sigma_h = \frac{v}{h} \sigma_v + \frac{v^2}{2h^2} \sigma_h$$

$$U_g = \frac{0.879 \text{ m/s}}{0.049 \text{ m}} 0.0064 \text{ m/s} + \frac{0.773 \text{ m}^2/\text{s}^2}{0,0048 \text{ m}^2} 0.001 \text{ m}$$

$$U_g = 0.275 \text{ m/s}^2$$

Para combinar la incertidumbre estadística de  $g$  con la incertidumbre instrumental y así calcular la incertidumbre total se utiliza la siguiente expresión:

$$u_t = \sqrt{U_g^2 + u_\lambda^2} = \sqrt{(0.275 \text{ m/s}^2)^2 + (0.3 \text{ m/s}^2)^2}$$

$$u_t = 0.41 \text{ m/s}^2$$

## Apéndice D: Tablas de resultados

En la siguiente tabla se muestran los distintos resultados de  $v$  y  $g$  para las distintas alturas  $h$ .

Altura h [m]	Velocidad v [m/s]	Aceleración g [m/s <sup>2</sup> ]	Altura h [m]	Velocidad v [m/s]	Aceleración g [m/s <sup>2</sup> ]
0.012	0.445288229	8.261733628	0.022	0.585831063	7.799955318
	0.445749827	8.278871186		0.585565138	7.792875713
	0.445595855	8.273152747		0.583710407	7.743587262
	0.445134576	8.256032932		0.583446404	7.736584244
	0.445288229	8.261733628		0.583446404	7.736584244
	0.444981028	8.250338134		0.583710407	7.743587262
	0.446212383	8.296062124		0.583446404	7.736584244
	0.446212383	8.296062124		0.58318264	7.729590722
	0.444981028	8.250338134		0.583446404	7.736584244
	0.445288229	8.261733628		0.584503851	7.764653461
	0.44452102	8.23328905		0.583974649	7.750599792
	0.444981028	8.250338134		0.582655827	7.715632096
	0.445288229	8.261733628		0.583446404	7.736584244
	0.445595855	8.273152747		0.583446404	7.736584244
	0.445441989	8.26744023		0.583974649	7.750599792
	0.444981028	8.250338134		0.58423913	7.757621853
	0.445595855	8.273152747		0.584503851	7.764653461
0.445595855	8.273152747	0.584768812	7.771694633		
0.445595855	8.273152747	0.583446404	7.736584244		
0.445903906	8.284595557	0.583446404	7.736584244		

Altura h [m]	Velocidad v [m/s]	Aceleración g [m/s <sup>2</sup> ]	Altura h [m]	Velocidad v [m/s]	Aceleración g [m/s <sup>2</sup> ]
0.036	0.844240838	9.899202667	0.048	0.986993114	10.14745216
	0.845347313	9.925167778		0.987748851	10.16299785
	0.847012475	9.964307409		0.991544965	10.24126478
	0.844240838	9.899202667		0.986238532	10.13194211
	0.844240838	9.899202667		0.987748851	10.16299785
	0.844240838	9.899202667		0.989263804	10.1941966
	0.844793713	9.912172469		0.987748851	10.16299785
	0.848684211	10.00367902		0.987748851	10.1941966
	0.848126233	9.990529259		0.988505747	10.17857929
	0.844793713	9.912172469		0.988505747	10.17857929
	0.847012475	9.964307409		0.988505747	10.17857929
	0.844240838	9.899202667		0.987748851	10.16299785
	0.843688685	9.886258304		0.986238532	10.13194211
	0.844240838	9.899202667		0.991544965	10.24126478
	0.844240838	9.899202667		0.987748851	10.16299785
	0.843688685	9.886258304		0.988505747	10.17857929
	0.844240838	9.899202667		0.988505747	10.17857929
	0.843688685	9.886258304		0.991544965	10.24126478
	0.844240838	9.899202667		0.987748851	10.16299785
	0.843688685	9.886258304		0.987748851	10.16299785

Altura h [m]	Velocidad v [m/s]	Aceleración g [m/s <sup>2</sup> ]	Altura h [m]	Velocidad v [m/s]	Aceleración g [m/s <sup>2</sup> ]
0.081	0.844240838	7.63393447	0.094	1.299093656	8.976831521
	0.845347313	7.63393447		1.299093656	8.976831521
	0.847012475	7.660326617		1.303030303	9.031318993
	0.844240838	7.620789514		1.29778672	8.958778572
	0.844240838	7.647113465		1.29778672	8.958778572
	0.844240838	7.620789514		1.29778672	8.958778572
	0.844793713	7.673574045		1.29778672	8.958778572
	0.848684211	7.60767848		1.303030303	9.031318993
	0.848126233	7.686855867		1.299093656	8.976831521
	0.844793713	7.60767848		1.299093656	8.976831521
	0.847012475	7.60767848		1.300403226	8.994939094
	0.844240838	7.60767848		1.300403226	8.994939094
	0.843688685	7.60767848		1.305668016	9.067920045
	0.844240838	7.60767848		1.301715439	9.013101511
	0.844240838	7.60767848		1.29778672	8.958778572
	0.843688685	7.60767848		1.29778672	8.958778572
	0.844240838	7.700172202		1.29778672	8.958778572
	0.843688685	7.673574045		1.304347826	9.049591763
	0.844240838	7.60767848		1.300403226	8.994939094
	0.843688685	7.60767848		1.29778672	8.958778572